

Математички институт САНУ  
Кнеза Михаила 36  
11 000 Београд  
СРБИЈА

Научном већу Математичког института САНУ  
Директору Математичког института САНУ проф. др Зорну Огњановићу  
Руководиоцу пројекта ОИ 174001 проф.др Катици (Стевановић) Хедрих

## ИЗВЕШТАЈ

### Са 7. међународног конгреса Српског друштва за механику, одржаног од 24-26. јуна 2019. у Сремским Карловцима, Србија

#### Поштовани,

Подносим вам стручни извештај са 7. међународног конгреса Српског друштва за механику, одржаног од 24-26. јуна 2019. у Сремским Карловцима, Србија.

Седми међународни конгрес Српског друштва за механику, одржан је од 24-26. јуна 2019. у Сремским Карловцима, српској културној баштини у организацији Српског друштва за механику и уз подршку Машинског факултета, Универзитета у Београду и Српске академије наука, огранак у Новом Саду.

**У организационом одбору су била и два истражача са пројекта ОИ 174001.**

#### Организациони одбор:

- Mihailo Lazarević, president of SSM (University of Belgrade)
- Srboljub Simić, (University of Novi Sad)
- Damir Mađarević, secretary of SSM (University of Novi Sad)
- Ivana Atanasovska, (Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade)
- Anđelka Hedrih, (Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade)
- Bojan Jeremić, University of Belgrade

[http://www.ssm.org.rs/congress\\_2019/index.html](http://www.ssm.org.rs/congress_2019/index.html)

**На конгресу је учествовало 119 регистрованих излагача, 8 пленарних предавача, 6 секција и 5 минисимпозијума.**

#### Пленарни предавачи:

- Walter Lacarbonara, DISG Dept Struct Geotech Eng SAPIENZA University of Rome, Rome Italy
- Zdravko Terze, Faculty of Mech. Eng. and Naval Architecture, University of Zagreb, Zagreb, Croatia
- Dušan Zorica, Math. Ins., Serbian Academy of Arts and Sciences, Branch Novi Sad, Depart. of Physics, UNS, Novi Sad
- HongGuang Sun, Hohai University, Institute of Soft Matter Mechanics, Nanjing, China
- Peter Ván, Ins. for Particle and Nuclear Physics, Wigner Research Centre for Physics, HAS, Budapest, Hungary
- Georgia Karanasiou, Ins. of Molecular Biology and Biotechnology, Unit of Medical Technology and Intelligent Infor. Sys., University of Ioannina, Ioannina, Greece
- Nemanja Zorić, Faculty of Mech. Eng., Depart. of Mechanics, University of Belgrade
- Bojan Međo, Faculty of Technology and Metallurgy, Depart. of General Technical Sciences, University of Belgrade Минисимпозијуми

**Од тога прва три пленарна предавача позвана су на прелог проф. Др Катице (Стевановић) Хедрих.**

#### Секције:

А: ОПШТА МЕХАНИКА

В: МЕХАНИКА ФЛУИДА •

С: МЕХАНИКА ЧВРСТИХ ТЕЛА •

Д: БИОМЕХАНИКА

Е: УПРАВЉАЊЕ И РОБОТИКА •

## F: ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНЕ И МУЛТИДИСЦИПЛИНАРНЕ ОБЛАСТИ

### Минисимпозијуми:

**M1: Нелинеарна динамика** (Орг.: Катица (Стевановић)Хедрих, МИ САНУ, Београд, коорг.: Ивана Атанасовска, МИ САНУ, Београд)

**M2: Биоинжењерство** (Орг.: Ненад ФилиповићФИН,Крагујевац)

**M3:Турбуленција** (Орг.: Ђорђе Чантрак,Машински факултет, Београд)

**M4: Таласи и дифузија у комплексним медијима** (орг.:Данило Карличић, Милан Цајић, МИ САНУ, Београд, коорг.:Zhuojia Fu, Хохаи универзитет, Кина)

**M5. Биомеханика и математичка биологија** (орг.:Анђелка Хедрих, МИ САНУ, Београд,коорг.: Ricardo Ruiz Baier,MI, Oxford University, UK)

Од тога 3 минисимпозијума су организовали истраживачи са пројекта ОИ 174001 (M1-17, M4-12 и M5-6), што је укупно 35 радова у оквиру ова три минисимпозијума.

### На овом конгресу сам учествовала као:

- члан организационог одбора,
- организатор минсимпозијума **M5-Биомеханика и математичка биологија** (орг.:Анђелка Хедрих, МИ САНУ, Београд,коорг.: Ricardo Ruiz Baier,MI, Oxford University, UK)
- са саопштењем под називом:  
„Andjelka N. Hedrih, Katica (Stevanović) Hedrih. Fractional order forced oscillatory modes of elements of the mitotic spindle“

У оквиру минисимпозијума M5 било је 6 радова од тога два саопштења из иностранства (Немачка и Велика Британија)

На конференцији су рад излагале и колеге са Математичког института САНУ, департман за механику др Божидар Јовановић и др Борислав Гајић.

**Награда др Растко Стојановић** која се традиционално додељује младом научнику, аутору једноауторског рада старости до 35 година припала је Georgios Vasileiou за рад под насловом:CAN A MODIFIED MATHIEU - DUFFING OSCILLATOR SIMULATE THE DYNAMIC TRANSMISSION ERROR OF A GEAR PAIR?

Georgios Vasileiou је рад саопштио у оквиру минисимпозијума M1- **Нелинеарна динамика** у организацији проф др Катице (Стевановић)Хедрих, МИ САНУ, Београд, и коорганизатора др Иване Атанасовске, МИ САНУ, Београд.

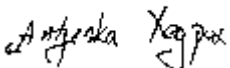
Подршку за учешће на овој конференцији добила сам од пројекта "ОИ174001 Динамика хибридних система сложених структура, Механика материја" и руководиоца пројекта проф. др Катице (Стевановић) Хедрих, Математичког института САНУ и Министарства просвете, науке и технолошког развоја.

Радови са конференције су штамани у зборнику радова у електронској форми који је каталогизован у Народној библиотеци Србије.

### У прилогу вам достављам:

1. Потврду да сам била организатор минисимпозијума
2. Потврду о учешћу на минисимпозијуму
3. Двостранични апстракт рада
4. Пар фотографија са конеренције

С Поштовањем,



др Анђелка Хедрих

научни сарадник

Истраживач на пројекту ОИ 174001

У Београду,

05.07.2019.



# CERTIFICATE OF APPRECIATION

to

**Andjelka Hedrih**

for her contribution in organizing Minisymposium M5- *Biomechanics and Mathematical Biology*

SEVENTH INTERNATIONAL CONGRESS ON THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Serbian Society of Mechanics

Congress chair

Dr Srboľjub Simić



Sremski Karlovci,  
June 26, 2019

Congress chair

Dr Mihailo Lazarević

# CERTIFICATE OF PARTICIPATION

This is to certify that

**ANĐELKA HEDRIH**

Participated in the

SEVENTH INTERNATIONAL CONGRESS ON THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Serbian Society of Mechanics



Congress Co-chair

Dr Srboľjub Simić

Sremski Karlovci,  
June 24, 2019

Congress Co-chair

Dr Mihailo Lazarević



Andjelka N. Hedrih, Katica (Stevanović) Hedrih. Fractional order forced oscillatory modes of elements of the mitotic spindle. In Proceedings [Elektronski izvor] / The 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, June 24-26, 2019 ; edited by M. Lazarević, S. Simić, D. Madjarević, I. Atanasovska, A. Hedrih, B. Jeremić. Belgrade : Serbian Society of Mechanics, 2019 (Belgrade : Planeta Print). - 1 USB fleš memorija ; 9 x 5 cm (u obliku kartice). M5-Biomechanics and mathematical biology, pp.217-218. Published by Serbian Society of Mechanics, Belgrade, 2019, Printed by Planeta Print, Belgrade, 2019

ISBN 978-86-909973-7-4

COBISS.SR-ID 277232652

CIP - Каталогizacija u publikaciji - Narodna biblioteka Srbije, Beograd. 531/534(082)(0.034.2)

M5f. Andjelka N. Hedrih<sup>1</sup>, Katica (Stevanović) Hedrih<sup>1,2</sup>

#### FRACTIONAL ORDER FORCED OSCILLATORY MODES OF ELEMENTS OF THE MITOTIC SPINDLE

<sup>1</sup> Department of Mechanics, Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts, Kneza Mihaila 36, 11 000 Belgrade, Serbia

e-mail: [handjelka@turing.mi.sanu.rs](mailto:handjelka@turing.mi.sanu.rs); [handjelka@gmail.com](mailto:handjelka@gmail.com)

<sup>2</sup> Faculty of Mechanical Engineering,

University of Nis, Aleksandra Medvedeva 14, 18 000 Nis, Serbia, e-mail: [khedrih@fbb.rs](mailto:khedrih@fbb.rs)

#### Abstract

Chromatin [1] and microtubule [2,3] will change their properties during cellular ageing, affecting the dynamics of mitotic spindle. To model the dynamics of mitotic spindle that will include the effects of ageing on their structural elements, we modified the previously proposed oscillatory model of the mitotic spindle [4]. The modification includes changes in the way of coupling between their structural elements; a mitotic spindle is considered as a fractional system of coupled fractional type oscillators. Fractional type oscillatory forced vibrations of pairs of homologue chromosomes are analyzed. Dynamics of each pair of homologue chromosomes can be modeled as a pair of coupled ordinary fractional order differential equations that can be solved independently. Using the Laplace transformation and the development into a series [5], analytical approximate solutions of coupled ordinary fractional order differential equations for forced vibration regimes are determined. Eigen main coordinates and eigen main fractional order modes for forced vibrations of the considered fractional type oscillatory model are determined in an analytical form.

The analytical solution revealed that fractional type main modes for forced regimes are independent, that there are no interactions and energy transfer between modes, but that total mechanical energies of modes are not constant. System behavior is linear.

**Key words:** chromosomes, mitotic spindle, biomechanical fractional type oscillatory model, analytical solution, fractional order differential equations, eigen fractional type modes, vibrations.

#### 1. Introduction

During the process of ageing chromatin structure will be modified in different ways [1]. Microtubules exhibit dynamical instability in the mitotic spindle during the process of cell division, but their dynamics will be also affected by the ageing process [2, 3]. To model the dynamical behavior of a mitotic spindle (MS) during metaphase and anaphase that could cover ageing changes in MS constitutive elements, we modified the previously proposed oscillatory model of the MS [4].

#### 2. Biomechanical oscillatory fractional type model of mitotic spindle

Mitotic spindle is considered as a fractional system of coupled fractional type oscillators. The coupling is performed through centrosomes that are considered as rheonomic centers of oscillations with masses. Microtubules are presented with standard fractional order creep elements. Homologue chromosomes are represented as mass particles interconnected with standard fractional order elements that represent kinetochore structures. Assumptions of the model are as described in [4].

### 2.1 Main eigen independent modes for forced vibrations of elements of the mitotic spindle

Standard light fractional order creep element and fractional order derivative of Louisville type were used in the analysis to express constitutive stress-strain relations for the restitution forces as a function of element elongation [5]. A general solution for fractional order forced modes is:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}_s(t, \alpha, \omega, \omega_{(s)}, \Omega, \Omega_s) = & \dot{\varphi}_s(t, \alpha, \omega, \omega_{(s)}) + \dot{\varphi}_{s, ext}(t, \alpha, \omega, \omega_{(s)}, \Omega, \Omega_s) = \\
 & + \dot{\varphi}_s(0) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_{(s)}^{2j} t^{2j} \sum_{k=0}^j \binom{k}{j} \frac{(\mp 1)^k \omega_{(s)}^{2k} t^{-2k}}{\omega_s^{2k} \Gamma(2k+1-\alpha j)} + \\
 & + \dot{\varphi}_s(0) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_{(s)}^{2j} t^{2j+1} \sum_{k=0}^j \binom{k}{j} \frac{(\mp 1)^k \omega_{(s)}^{2k} t^{-2k}}{\omega_s^{2k} \Gamma(2k+2-\alpha j)} + \\
 & + \int_0^t \langle \dot{h}_s \cos n(\Omega(t-\tau) + h_s \cos \Omega_s(t-\tau)) \rangle \left\langle \sum_{m=0}^k (-1)^m \omega_{(s)}^{2m} \tau^{2m} \sum_{j=0}^k \binom{k}{m} \frac{\omega_{(s)}^{2j} \tau^{-2j}}{\omega_s^{2j} \Gamma(2k+2-\alpha m)} \right\rangle d\tau - \\
 & - \int_0^t \langle \dot{h}_{(s)} \rangle D_s^{\alpha} \left[ \langle \dot{h}_{s, ext} \cos \Omega_s(t-\tau) + \dot{h}_{s, ext} \cos \Omega_s(t-\tau) \rangle \right] \left\langle \sum_{m=0}^k (-1)^m \omega_{(s)}^{2m} \tau^{2m} \sum_{j=0}^k \binom{k}{m} \frac{\omega_{(s)}^{2j} \tau^{-2j}}{\omega_s^{2j} \Gamma(2k+2-\alpha m)} \right\rangle d\tau
 \end{aligned} \quad (1)$$

$s = 1, 2$

### 3. Conclusions

Using a modified biomechanical oscillatory model of a mitotic spindle where couplings between mass particles are achieved by fractional type standard elements, we analyzed fractional type main modes for forced regimes of oscillations of pairs of homologue chromosomes. Approximate solution in analytical form for that fractional type model is determined and presented. Fractional type main modes for forced regimes are independent, there are no interactions and energy transfer between modes, but total mechanical energies of modes are not constant. System behavior is linear.

**Acknowledgements:** Parts of this research is supported by the Ministry of Sciences and Technology of Republic of Serbia through Mathematical Institute SANU, Belgrade Grant ON174001 "Dynamics of hybrid systems with complex structures, Mechanics of materials."

### References

- [1] Feser J., Tyler J., *Chromatin structure as a mediator of aging*. Febs Lett. 585(13), 2041–2048, 2011. Doi:10.1016/J.Febslet.2010.11.016.
- [2] Ebbinghaus M., Ludger S., *Theoretical modeling of aging effects in microtubule dynamics*. Biophysical Journal, Vol 100, 832-838. 2011. Doi: 10.1016/J.Bpj.2010.11.047
- [3] Duellberg C., Cade I.N., Surrey T., *Microtubule aging probed by microfluidics assisted tubulin washout*, Molecular biology of the cell. Vol 27, 3563-3573, 2016.
- [4] Hedrih A., (Stevanović) Hedrih K., Kinetic energy of dyads of sister chromatids in a biomechanical oscillatory model of the mitotic spindle. RAD Conference Proceedings, Publisher: RAD Association, Nis, Serbia, vol. 3, 225-230, 2018. Doi:10.21175/RadProc.2018.47
- [5] Goroško O.A. and Hedrih (Stevanović) K.R., (2001), *Analiitička dinamika (mehanika) diskretnih naslednih sistema, (Analytical Dynamics (Mechanics) of Discrete Hereditary Systems)*, University of Niš, 2001, Monograph, p. 426, YU ISBN 86-7181-054-2.





Коктел добродошлице.



Наон предавања проф. др Валтера Лакарбонаре и проф. др Здравка Терзеа.





проф. др Рикардо Руиз Бајер, проф. др Катица (Стевановић) Хедрих, акдемк проф.др Милош Којић